Lineare Algebra I – Prüfung Winter 2022 – Prof. Pink

1. *(40 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe sollen Sie die Antworten nicht begründen.

(I) Im Körper $\mathbb{F}_{13}$ gilt die Gleichung $x^2 = \overline{3}$ für

(a) $x = \overline{3}$.

(b) $x = \overline{6}$.

(c) $x = \overline{9}$.

(d) $x = \overline{12}$.

(II) Welcher Ausdruck ist für beliebige Aussagen A und B äquivalent zu dem Ausdruck $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$?

(a) $A \Leftrightarrow B$

(b) $A \vee \neg A$

(c) $A \vee B$

(d) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

(III) Welche der folgenden Aussagen ist sinnvoll und eindeutig für einen beliebigen Körper K? (Es kommt nicht darauf an, ob die Aussage richtig ist.)

(a) $\forall x \in K \; \exists y \in K : x = y^2$.

(b) $\exists x \in K : x^2 > x$.

(c) $\forall x \in K \smallsetminus \{0\} : e^x \neq 1$.

(d) $\exists x \in K : \; x - x = y - y \;\; \forall y \in K$.

(IV) Welcher der folgenden vier Ausdrücke ist **nicht** identisch zu dem Ausdruck $(A - B)^2$ für beliebige quadratische Matrizen A und B derselben Grösse?

(a) $(B - A)^2$

(b) $A(A - B) + B(B - A)$

(c) $A^2 - AB - BA + B^2$.

(d) $A^2 - 2AB + B^2$

(V) Unter welcher Operation für eine Matrix A ist die Lösungsmenge der Vektorgleichung $Av = 0$ im allgemeinen **nicht** invariant?

(a) Die Vertauschung zweier Zeilen von A.

(b) Die Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.

(c) Die Multiplikation von links mit einer oberen Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen 1.

(d) Das Ersetzen von A durch die Blockmatrix $\binom{A}{A}$.

(VI) Welche der folgenden Teilmengen ist **kein** Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums der Zeilenvektoren $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 = 3x_3\}$.
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$.
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.
(d) $\{(0, 0, x^2 - y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(VII) Für Spaltenvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sei $v \sim w$ durch eine der folgenden Bedingungen definiert. In welchem der Fälle liefert dies **keine** Äquivalenzrelation?

(a) ... eine invertierbare Matrix A existiert mit $A \cdot w = v$.
(b) ... eine lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(v) = f(w)$.
(c) ... ein $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert mit $w + u = v$.
(d) ... ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $x \cdot w = v$.

(VIII) Für jeden Unterraum $V \subset \mathbb{R}^3$

(a) existiert ein Unterraum $W \subset \mathbb{R}^3$ mit $\dim(V + W) = \dim(W)$.
(b) existiert ein Unterraum $W \subset \mathbb{R}^3$ mit $V \cap W = \varnothing$.
(c) und jeden Unterraum $W \subset \mathbb{R}^3$ gilt $|V \cap W| = \infty$.
(d) mit $\dim(V) = 2$ existiert ein Unterraum $W \subset \mathbb{R}^3$ der Dimension 2 mit $|V \cap W| = 1$.

(IX) Welche Matrix ist die Inverse der folgenden reellen Matrix?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(X) Welche der folgenden Abbildungen ist ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen?

(a) $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$.

(b) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, 1)$.
(c) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$.
(d) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

(XI) Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-7} & -1 & \pi \\ \frac{2}{371} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(3) & 0 & 1 \\ -15 & 1 & \pi^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Es gilt $\det(A^{21}B^{17}) = \pi^{55}$.
(b) Es gilt $\det(A^{21}B^{17}) = \pi^{3}$.
(c) Es gilt $\det(A^{21}B^{17}) = -1$.
(d) Es gilt $\det(A^{21}B^{17}) = 1$.

(XII) Welche der folgenden Aussagen impliziert, dass die Aussage A_n für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 1$ gilt?

(a) Es gilt A_1 und für alle $k, \ell \geqslant 1$ gilt $(A_k \wedge A_\ell) \Longrightarrow A_{\ell \cdot k}$.
(b) Es gilt A_1 und für alle $k, \ell \geqslant 1$ gilt $(A_k \wedge A_\ell) \Longrightarrow A_{k^\ell}$.
(c) Es gilt A_1 und für alle $k, \ell \geqslant 1$ gilt $(A_k \wedge A_\ell) \Longrightarrow A_{2k+3\ell}$.
(d) Es gilt A_1 und für alle $k, \ell \geqslant 1$ gilt $(A_k \wedge A_\ell) \Longrightarrow A_{k+\ell}$.

(XIII) Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) hat das lineare Gleichungssystem $Av = 0$ keine Lösung.
(b) existiert ein Vektor $b \in \mathbb{R}^4$, so dass das lineare Gleichungssystem $Av = b$ genau eine Lösung hat.
(c) sind die ersten drei Zeilen linear unabhängig.
(d) erzeugen je zwei Spalten denselben Unterraum wie alle Spalten.

(XIV) Welche Aussage ist richtig für das rationale Polynom

$$P(X) \;:=\; \sum_{k=0}^{2021} X^k \;=\; X^{2021} + X^{2020} + \ldots + X + 1\ ?$$

(a) Das Polynom hat genau eine rationale Nullstelle.
(b) Das Polynom hat die Nullstellen -3 und -7.
(c) Das Polynom ist irreduzibel.

(d) Das Polynom zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren.

(XV) Für die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^4$ gilt:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Das Erzeugnis hat Dimension 2.

(b) Das Erzeugnis hat Dimension 3.

(c) Es existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^4$, so dass $\{a, b, c, d\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(d) Die Gleichung $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ besitzt keine nicht-triviale Lösung $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(XVI) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschreibt die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot (1 + i)$?

(a) $z \mapsto i \cdot z \cdot i$

(b) $z \mapsto \bar{z} \cdot i$

(c) $z \mapsto \bar{z} \cdot i^{-1}$

(d) $z \mapsto i \cdot z \cdot i^{-1}$

(XVII) Seien A eine reelle $m \times n$-Matrix und b ein reeller Spaltenvektor, so dass das lineare Gleichungssystem $AX = b$ genau eine Lösung hat. Dann gilt:

(a) A ist invertierbar.

(b) $n < m$.

(c) $\mathrm{Rang}(A) = n$.

(d) $\mathrm{Rang}(A) = m$.

(XVIII) Die lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y - z, z - x, x - y)$

(a) ist injektiv.

(b) ist surjektiv.

(c) hat Bild der Dimension 2.

(d) hat Kern der Dimension 2.

(XIX) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für alle $n \geqslant 0$?

(a) Jede $n \times n$-Matrix, die nur den Eigenwert 1 hat, ist ähnlich zur Einheitsmatrix.

(b) Je zwei $n \times n$-Matrizen mit derselben Determinante sind ähnlich.

(c) Die reellen Matrizen $(i \cdot \delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ und $((n - i) \cdot \delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sind ähnlich.

(d) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch die Matrizen $A^2 + A$ und $B^2 + B$ ähnlich.

(XX) Für jede reelle 3×6-Matrix A vom Rang 3 gilt:

(a) Es existiert eine von Null verschiedene reelle 3×3-Matrix B mit $BA = 0$.

(b) Es existiert ein Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem $Av = b$ keine Lösung hat.

(c) Für die lineare Abbildung $L_A \colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$ gilt $\dim(\mathrm{Bild}(L_A)) = \dim(\mathrm{Kern}(L_A))$.

(d) Je drei Spalten von A sind linear unabhängig.

2. Betrachte die durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

(a) *(3 Punkte)* Für welche Werte von $h \in \mathbb{R}$ ist L_A surjektiv?

(b) *(3 Punkte)* Für welche Werte von $h \in \mathbb{R}$ ist L_A injektiv?

(c) *(4 Punkte)* Bestimme im Fall $h = 2$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(L_A)$.

(d) *(3 Punkte)* Ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(e) *(3 Punkte)* Gib ein Beispiel eines lineares Gleichungssystems mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten, und keiner Lösung.

3. Sei K ein Körper und $P_n \subset K[X]$ der K-Unterraum aller Polynome vom Grad $\leqslant n$.

(a) *(2 Punkte)* Gib die Definition einer geordneten Basis eines K-Vektorraums V an.

(b) *(2 Punkte)* Gib eine geordnete Basis von P_n an. (Ohne Beweis)

(c) *(4 Punkte)* Zeige, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$T\colon P_n \to P_n,\ f(X) \mapsto f(X+1) - \tfrac{df}{dX}.$$

(d) *(6 Punkte)* Bestimme die Darstellungsmatrix von T bezüglich der geordneten Basis in (b).

(e) *(2 Punkte)* Ist T ein Isomorphismus, und warum?

4. Sei $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K mit $n \geqslant 1$.

(a) *(2 Punkte)* Gib die Leibnizsche Formel für $\det(A)$ als Polynom in den Koeffizienten an.

(b) *(3 Punkte)* Gib drei allgemeine Grundeigenschaften der Determinante an.

(c) *(3 Punkte)* Zeige, dass A nicht invertierbar ist, wenn $\det(A) = 0$ ist.

(d) *(8 Punkte)* Berechne im Fall $a_{ij} = 2^{i+j} \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix $B := A + I_n$.

5. Betrachte einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$.

(a) *(2 Punkte)* Gib die genaue Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren von f an.

(b) *(4 Punkte)* Zeige, dass je zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

(c) *(4 Punkte)* Sei A eine $n \times n$-Matrix über K, und $v \in K^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeige, dass v für jede natürliche Zahl $k \geqslant 0$ ein Eigenvektor der Matrix A^k zum Eigenwert λ^k ist.

(d) *(3 Punkte)* Sei A eine $n \times n$-Matrix über K, die die Gleichung $A^{2021} = A^{2022}$ erfüllt. Zeige, dass 0 und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte von A sind.

(e) *(3 Punkte)* Entscheide, mit vollständigem Beweis, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ die Gleichung in (d) erfüllt.